Superelementi

Jedan od osnovnih problema u primjeni metode konačnih elemenata na rješavanje realnih problema je nužnost diskretizacije na velik broj konačnih elemenata. Posljedica takve diskretizacije je veliki broj stupnjeva slobode problema koji treba riješiti.
Jedan od mogućih naćina rješavanja problema velikog broja stupnjeva slobode je razbijanje te konstrukcije na podstukture ili superelemente. Time se umjesto jednog velikog problema rješava nekoliko malih.
U prvom koraku se određuju matrice krutosti i vektori opterećenja za superelemente, a u drugom se koraku rješava konstrukcija sastavljena od superelemenata. U tom su slučaju nepoznanice samo stupnjevi slobode na spojevima superelemenata.
U trećem koraku proračunaju se stupnjevi slobode unutar superelementa iz poznatih veznih stupnjeva slobode.
Postupak određivanja matrice krutosti i vektora opterećenja podstrukture ili superelementa obično se naziva ***statička kondenzacija***.

Statička kondenzacija

Promatra se superelement ili podstruktura za koju je provedena parcionalizacija matrice krutosti i vektora opterećenja, tako da su grupirani članovi koji odgovaraju odredjenim tipovima stupnjeva slobode, s time da su oznake slijedeće:

- s – propisani stupnjevi slobode
- i - unutarnji stupnjevi slobode
- r – vezni stupnjevi slobode

Propisani stupnjevi slobode su zadani preko rubnih uvijeta na promatranom superelementu ukoliko ih ima
Vezni stupnjevi slobode su oni koji preostaju nakon statičke kondenzacije, odnosno oni preko kojih je promatrani superelement vezan za ostale superelemente u konstrukciji.
Za tako definirani problem mogu se napisati slijedeće tri jednadžbe:

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ir}\mathbf{u}_r + \mathbf{K}_{is}\mathbf{u}_s = \mathbf{f}_i \tag{1}$$

$$\mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r + \mathbf{K}_{rs}\mathbf{u}_s = \mathbf{f}_r \tag{2}$$

$$\mathbf{K}_{is}^T\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{rs}^T\mathbf{u}_r + \mathbf{K}_{rs}\mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s + \mathbf{r}_s \tag{3}$$

gdje su:
$\mathbf{K}_{kk}$ – submatrice matrice krutosti ($k = i$, r ili s)
$\mathbf{u}_k$ – subvektori vektora pomaka ($k = i$, r ili s)
$\mathbf{f}_k$ – subvektori vektora opterećenja ($k = i$, r ili s)
$\mathbf{r}_s$ – reakcije na osloncima za propisane stupnjeve slobode

Kako su stupnjevi slobode $\mathbf{u}_s$ poznati mogu se iz jednadžbi (1), (2) i (3) odrediti modificirani vektori opterećenja:

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{is}\mathbf{u}_s \tag{4}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_r = \mathbf{f}_r - \mathbf{K}_{rs}\mathbf{u}_s \tag{5}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \mathbf{f}_s - \mathbf{K}_{ss}\mathbf{u}_s \tag{6}$$

ako se izraze (4), (5) i (6) uvrsti natrag u jednadžbe (1), (2) i (3) dobiva se:

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{ir}\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{f}}_i \tag{7}$$

$$\mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{f}}_r \tag{8}$$

$$\mathbf{K}_{is}^T\mathbf{u}_i + \mathbf{K}_{rs}^T\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{f}}_s + \mathbf{r}_s \tag{9}$$

Kao što je već navedeno osnovna ideja statičke kondenzacije je izražavanje unutarnjih stupnjeva slobode pomoću veznih, tako da se u proračunu cijele konstrukcije pojavljuju jedino vezni stupnjevi slobode. Prema tome iz jednadžbe (7) slijedi:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_i - \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ir}\mathbf{u}_r \tag{10}$$

Uvrštavanjem izraza (10) u (8) dobiva se:

$$\mathbf{K}_{ir}^T\left(\mathbf{K}_{ii}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_i - \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ir}\mathbf{u}_r\right) + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{f}}_r$$

što nakon sređivanja daje:

$$\left(\mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ir}\right)\cdot\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{f}}_r - \mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{K}_{ii}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_i$$

tako da se može pisati jednažba:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_r = \mathbf{f} \tag{11}$$

gdje su:
$\mathbf{K}$ – matrica krutosti superelementa
$\mathbf{f}$ – vektor opterećenja superelementa
koji iznose:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ir} \tag{12}$$

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}_r - \mathbf{K}_{ir}^T\mathbf{K}_{ii}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_i \tag{13}$$

Spajanjem tako određenih matrica krutosti i vektora opterećenja superelementa dobiva se globalni linearni sustav, čijim se rješenjem određuju svi vezni pomaci. Unutarnji pomaci na nekom superelementu odredjuju se uvrštavanjem odgovarajućih veznih pomaka u izraz (10). U izrazima (12)i (13) pojavljuju se inverzije matrice $\mathbf{K}_{ii}$ koja se može izbjeći korištenjem slijedećih linearnih sustava:

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{H}_{ir} = \mathbf{K}_{ir} \tag{14}$$

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{g}_i = \bar{\mathbf{f}}_i \tag{15}$$

Broj desnih strana linearnog sustava (14) jednak je broju veznih stupnjeva slobode superelementa. Rješenjem linearnih sustava (14) i (15)dobivaju se:

$$\mathbf{H}_{ir} = \mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ir} \tag{16}$$

$$\mathbf{g}_{i} = \mathbf{K}_{ii}^{-1}\bar{\mathbf{f}}_{i} \tag{17}$$

Usvajanjem izraza (16) i (17) mogu se pisati novi izrazi za matricu krutosti i vektor opterećenja superelementa:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{rr} - \mathbf{K}_{ir}^{T}\mathbf{H}_{ir} \tag{18}$$

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}_{r} - \mathbf{K}_{ir}^{T}\mathbf{g}_{i} \tag{19}$$

Izrazima (1) do (19) potpuno je definirana matematička osnova statičke kondenzacije